4

MODELO PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE *LAYOUT* DE INSTALAÇÕES COM A TECNOLOGIA DAS RESTRIÇÕES

Desde os finais dos anos oitenta a tecnologia da PLR, e em particular a PLR(*DF*), tem vindo a ser aplicada na resolução de problemas, com assinalável sucesso, em áreas deveras diversas, onde outras tecnologias caducaram. No que se refere às aplicações industrias, o planeamento e o escalonamento da produção têm sido as áreas de eleição. Muitos destes problemas apresentam características comuns aos problemas de natureza combinatória e, portanto, são de difícil resolução. Como se demonstrou, os PPLIs (problemas de projecto de *layout* de instalações) são também problemas de grande complexidade e, portanto, de difícil resolução. Daí que se tenha decidido explorar a tecnologia da PLR(*DF*) na resolução dos PPLI.

A resolução dos PPLI com recurso a tecnologia da PLR(*DF*) requer, no entanto, a definição de novos modelos ou mesmo a adaptação de alguns modelos já usados com outras tecnologias. Uma componente fundamental deste capítulo destina-se a descrever um modelo formal para a resolução de PPLI, com destaque para os relacionados com as instalações industriais, tendo sido desenvolvido considerando a tecnologia da PLR(*DF*). Este modelo inspira-se em larga medida nos modelos para problemas de atribuição de espaço a duas dimensões, descritos no capítulo 2. A outra componente fundamental relaciona-se com a identificação das variáveis do problema bem como com a definição dos seus domínios e, fundamentalmente, com a especificação das restrições, que obviamente são de carácter geométrico.

4.1 Requisitos de Informação para Resolução de PPLI

Esta secção destina-se a identificar a informação necessária para a aplicação do modelo proposto à resolução de PPLI, usando meta-interpretadores de PLR(*DF*). Estes requisitos de informação são ilustrados com um exemplo de um PPLI, que vai sendo descrito à medida que as normas utilizadas forem discutidas. Interessa, no entanto, começar por uma abordagem não vinculativa à problemática dos PPLI.

4.1.1 Modelos para PPLI

No capítulo 2 foram apresentados alguns dos modelos mais representativos para a resolução de PPLI. Globalmente, todos estes modelos enfermam de problemas de complexidade. Em termos geométricos, estão-se a considerar instalações cujos requisitos espaciais correspondem a uma área fixa, a qual é a fracção mínima do espaço disponível na planta da unidade fabril a atribuir à instalação. Tenha-se em atenção que o espaço disponível para dispor as instalações, usualmente um edifício ou uma fracção deste, é aqui designado por planta. Regra geral os requisitos espaciais das instalações a colocar na planta podem ser agrupados na forma de: (i) áreas iguais e orientação fixa; (ii) áreas diferentes e orientação fixa; (iii) áreas diferentes e orientação variável; (iv) áreas diferentes e forma variável. As aproximações (i) e (ii) implicam apenas a escolha do local destinado a cada instalação. Em (iii) acrescenta-se uma nova dimensão à complexidade do problema pelo facto de ser necessário escolher também a orientação das instalações na planta. Finalmente, em (iv), a dimensão relativa à orientação da instalação é substituída por outra que obriga à escolha da forma da instalação. Dado que se consideram áreas rectangulares para as instalações, a caracterização da forma da instalação reduz-se à definição do seu comprimento e largura.

Esta classificação tem em linha de conta apenas instalações fabris de um só piso. No entanto, como anteriormente foi referido (secção 2.6), assiste-se ao surgimento de variantes que consideram vários pisos, o que, obviamente, acrescenta outra dimensão ao problema, logo aumentando a complexidade do mesmo. Refira-se, no entanto, que neste trabalho consideram-se apenas as instalações fabris com um só piso.

Para além dos aspectos geométricos, é ainda necessário considerar os aspectos relacionados com o processo produtivo. Este é escolhido, fundamentalmente, em função dos produtos a fabricar e da capacidade produtiva a instalar para satisfazer a procura. Geralmente, em PPLI considera-se, directamente ou indirectamente, uma estimativa da procura de produtos. É esta estimativa da procura de produtos que permite efectuar a avaliação e escolha da melhor solução para cada instância do problema. Um dos parâmetros que influencia a qualidade das soluções é o fluxo entre instalações, e este parâmetro é função do processo e da capacidade produtiva a instalar.

Ainda relativamente aos processos de fabrico, importa referir que as soluções apontadas não consideram, normalmente, instalações alternativas para realizar as operações. O modelo que se propõe admite a existência destas instalações alternativas. As instalações alternativas para a mesma operação são agrupadas em classes de instalações. Embora as instalações da mesma classe sejam capazes de efectuar as mesmas operações, estas podem não as realizar com as mesmas características (e.g., velocidade, qualidade).

Finalmente, há ainda que referir um aspecto de grande importância, e que se relaciona com o tipo de variáveis usadas em PPLI e discutidas no capítulo 2, e o tipo de variáveis usadas com os meta-interpretador de PLR(*DF*). Nos modelos para PPLI coexistem variáveis de decisão que tomam valores reais, e variáveis de decisão que com valores inteiros. Um exemplo desta última situação é o modelo de proposto por Montreuil *et al*, (1993), e apresentado na secção 2.4.2. Num modelo em que haja recurso a meta-interpretadores para PLR(*DF*) devem-se considerar apenas variáveis de decisão que tomam valores em intervalos de valores inteiros, sendo necessário, por conseguinte, efectuar uma conversão de valores reais para valores inteiros que garantam uma precisão adequada. Esta conversão tem de ser efectuada não apenas para as variáveis de decisão relacionadas com aspectos geométricos, como também para os valores relacionados com o processo e procura de produtos, os quais em última instância, condicionam o fluxo de materiais entre as instalações.

4.1.2 Planta da Instalação

Conhecer as dimensões da planta não é, na maior parte das situações, essencial para procurar a melhor solução de um PPLI, quando o espaço disponível não constitui uma limitação. No entanto, o conhecimento do comprimento e da largura desta pode ajudar a encontrar a melhor solução. Por outro lado, o espaço físico disponível na planta pode não ser compatível com a melhor solução encontrada, devido à forma da planta, daí que, em princípio se aconselhe que as dimensões da planta devam ser tomadas em linha de conta

As soluções para o problema que consideram o comprimento e a largura da planta assumem de forma implícita uma instalação fabril cuja planta possui forma rectangular com comprimento *C* e largura *L*, (ou seja, a posição de todas as instalações é condicionada por estas dimensões). É óbvio que nem todas as plantas possuem esta forma rectangular. Nestas situações considera-se um rectângulo que envolve a planta real (Figura 4-1). Esta abordagem tem como inconveniente a possibilidade de originar soluções em que a disposição de algumas das instalações ultrapasse a linha de fronteira que delimita o interior da planta. Esta situação pode, no entanto, ser evitada, o que passa pela criação de um número suficiente de instalações fictícias cuja disposição é forçada à partida para as áreas não pertencentes à planta real e de forma a que essas áreas sejam indisponibilizadas.

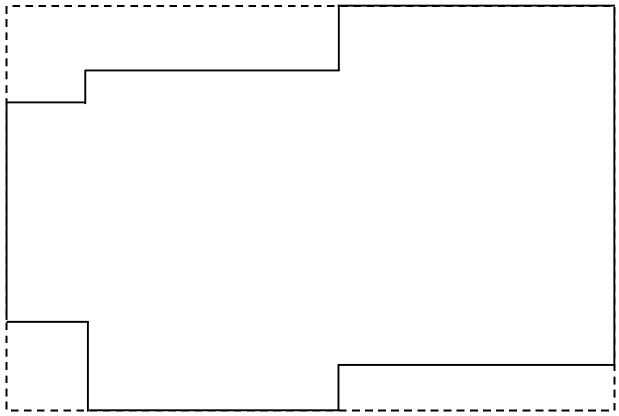

Figura 4-1: Exemplo de um rectângulo que envolve a forma da instalação fabril.

Podem-se considerar outras alternativas de modo a evitar a criação de instalações fictícias, porém a abordagem seguida neste trabalho assume-se como a mais interessante, sendo de certa forma a mais natural, tendo em conta o paradigma da PLR. Tudo passa por se colocarem restrições que excluam as áreas não pertencentes à planta do espaço disponível para dispor as instalações. Este tipo de restrições serão discutidas com maior detalhe, mais à frente, neste capítulo. Por outro lado, esta abordagem, além de permitir excluir as áreas do rectângulo que envolve a planta real, (Figura 4-1), permite ainda excluir áreas interiores que não estão disponíveis para a disposição de instalações.

Considerando o que foi discutido acerca da forma planta, a representação desta deve então ter em consideração que:

C é o comprimento do rectângulo que envolve a planta;

L é a largura do rectângulo que envolve a planta;

NAP é o número de áreas proibidas;

$\{AP\}$ é o conjunto de áreas proibidas, e que realmente não pertencem à planta real.

Por convenção, o comprimento C é medido sempre segundo o eixo dos x enquanto a largura é medida segundo o eixo dos y.

As áreas proibidas são áreas rectangulares que se podem sobrepor. A intersecção do rectângulo envolvente da planta real com a união destas áreas proibidas deve resultar no espaço disponível da planta real para a disposição das instalações. Estas áreas proibidas, pelo facto de serem rectangulares, são descritas em termos dos parâmetros:

X_i é o valor da coordenada x relativamente à origem da área i ;

Y_i é o valor da coordenada y relativamente à origem da área i ;

C_i é o comprimento da área rectangular i ;

L_i é a largura da área rectangular i .

4.1.3 Instalações

Sob o ponto de vista dos PPLI as instalações constituem espaços da planta destinados aos mais variados fins, como, por exemplo, os destinados a contemplar a prestação de serviços (por exemplo, os serviços administrativos), armazéns e/ou processos produtivos. No contexto deste trabalho têm um particular interesse as instalações que se relacionam com o processo produtivo. Estas instalações podem ser constituídas por uma simples estação de trabalho, que se refere a uma máquina que, opcionalmente, pode contemplar uma pequena área para armazenamento temporário de materiais, ou então por uma colecção de estações de trabalho. Uma colecção de estações de trabalho pode constituir-se, ela própria, num subproblema de *layout*. Estes subproblemas seguem um dos diversos tipos de *layout* de produção: de produto, de processo, de grupo ou híbrido.

Em todas as situações discutidas consideram-se conhecidas à partida quais as instalações onde ocorrem as operações, embora não se considere que existam instalações alternativas para as operações a efectuar. No sistema que aqui se descreve podem ser consideradas instalações alternativas para as diferentes operações. As instalações são agrupadas em classes de instalações de acordo com as operações que realizam. Uma classe de instalações é o conjunto das diferentes instalações que podem realizar as mesmas operações e, por esse motivo, uma instalação é completamente identificada não só pelo seu nome ou código como pela sua classe.

Cada instalação é identificada por um conjunto de propriedades que estão relacionadas com a sua forma. Existem ainda outras propriedades relativas à capacidade das instalações para a realização de operações, mas estas relacionam-se directamente com o processo produtivo.

A descrição de uma instalação tem, por conseguinte, que atender a que:

T_i é a classe de instalações *i ;*

NI_i é número de instalações da classe *i* ;

I_{iu} é a instalação *u* da classe *i* ;

A_{iu} representa a área mínima necessária a I_{iu} ;

$\{RA_{iu}\}$ é um conjunto de valores que dá o quociente entre a largura e o comprimento de I_{iu} , em que cada um dos valores é designado por razão de aspecto[1];

C_{iu} é o comprimento de I_{iu} ;

L_{iu} é a largura de I_{iu} ;

F_{iu} é o valor opcional da folga[2] de I_{iu} e representa a distância mínima a que as instalações vizinhas devem estar colocadas (Figura 4-2).

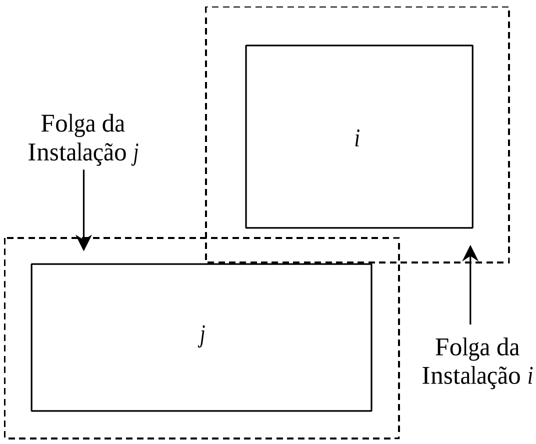

Figura 4-2: O maior valor de folga de um par de instalações estabelece a distância mínima a que estas devem ser dispostas na planta.

Algumas destas características de uma instalação encontram-se representadas na

---

[1] Esta designação tem a ver com a sua contrapartida em língua inglesa e dada na forma de *aspect ratio.*

[2] Este valor é referido na literatura em língua inglesa como *clearance.*

Figura 4-3. As relacionadas com o comprimento e a largura assim como a relacionada com o conjunto de valores da razão de aspecto (RA), são equivalentes, sendo portanto redundantes. As expressões (4-1) e (4-2) permitem relacionar estes valores da razão de aspecto com os valores do comprimento e da largura da instalação.

$$L_{iu} = \sqrt{RA_{iu} \times A} \tag{4-1}$$

$$A_{iu} = C_{iu} \times L_{iu} \tag{4-2}$$

É claro que ao se considerarem um conjunto de valores da RA então devem-se considerar também vários valores para C e para L. Por outro lado, quando a área necessária para as instalações é fixa, basta apenas conhecer os valores de C ou de L, uma vez que (4-2) permite calcular o outro valor. Quando a forma de uma instalação é conhecida à partida, é suficiente conhecer o valor do seu comprimento e da sua largura, sendo apenas necessário decidir qual a melhor orientação. Se os requisitos de forma de uma instalação são flexíveis, então, e de uma forma geral, devem ser fornecidos como dados de entrada o conjunto de valores da RA e o valor mínimo da área necessária para a instalação. Nesta situação interessa escolher não só a posição para a instalação como também quais são de facto os melhores valores para o seu comprimento e largura.

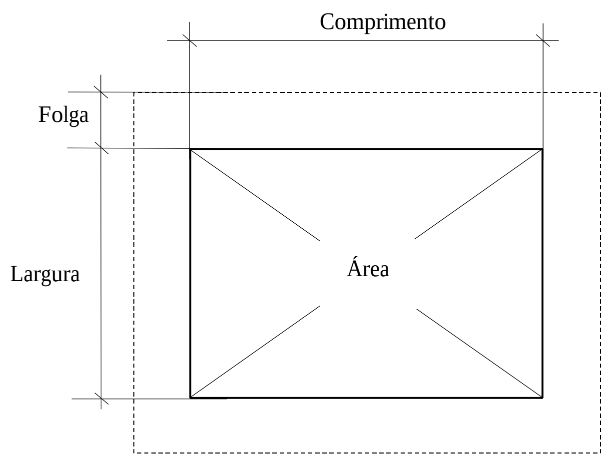

Figura 4-3: Aproximação da forma de uma instalação por um rectângulo.

Geralmente, o valor da área necessária e o conjunto de valores da RA (razão entre a largura e o comprimento) são suficientes para tratar todas as situações, mesmo aquelas em que a forma da instalação é fixa. Quando a forma e a orientação é fixa é necessário apenas um valor da RA. Se apenas a orientação é variável então são necessários dois valores da RA, sendo um dos valores o inverso do outro. Na situação geral são necessários tantos valores da RA quanto as formas possíveis para a instalação. A Tabela 4-1 mostra como é constituído o conjunto de valores da RA quando a orientação das instalações na planta são fixas, variável ou quando possuem uma forma variável. Estas situações encontram-se ilustradas no exemplo apresentado na Tabela 4-2.

Tabela 4-1: Graus de liberdade para a forma das instalações.

Forma da instalação	**Possibilidades**	***RA***
Orientação fixa	1	$\{v\}$
Orientação variável	2	$\{v, \frac{1}{v}\}$
Forma variável	N	$\{v_1, ..., v_n\}$

Tabela 4-2: Um exemplo de requisitos de espaço para um total de 24 instalações correspondentes a dez classes (de instalações).

<table>
<tr><td>Instalação</td><td colspan="3">A</td><td colspan="3">B</td></tr>
<tr><td>Área</td><td>1000</td><td>1100</td><td>1100</td><td>300</td><td>300</td><td>300</td></tr>
<tr><td>L/C</td><td>2,5</td><td>0,36; 2,75</td><td>0.36, 2.75</td><td>0,33; 3,0</td><td>0,33; 3,0</td><td>0,33; 3,0</td></tr>
<tr><td>Folga</td><td>-</td><td>3</td><td>3</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Instalação</td><td colspan="2">C</td><td colspan="2">D</td><td colspan="2">E</td></tr>
<tr><td>Área</td><td>3000</td><td>3000</td><td>1200</td><td>1200</td><td>2500</td><td>2500</td></tr>
<tr><td>L/C</td><td>0,2..5,0</td><td>0,2..5,0</td><td>0,5..1,2</td><td>0,5..1,2</td><td>0,8..1,2</td><td>0,8..1,2</td></tr>
<tr><td>Folga</td><td>2</td><td>2</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Instalação</td><td colspan="2">F</td><td colspan="4">G</td></tr>
<tr><td>Área</td><td>2000</td><td>2000</td><td>1000</td><td>1000</td><td>750</td><td>750</td></tr>
<tr><td>L/C</td><td>0,9..1,5</td><td>0,9..1,5</td><td>0,625; 1,6</td><td>0,625; 1,6</td><td>0,5; 2,0</td><td>0,5; 2,0</td></tr>
<tr><td>Folga</td><td>-</td><td>-</td><td>4</td><td>4</td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Instalação</td><td>H</td><td colspan="2">I</td><td colspan="3">J</td></tr>
<tr><td>Área</td><td>2800</td><td>1000</td><td>1200</td><td>300</td><td>600</td><td>600</td></tr>
<tr><td>L/C</td><td>0,5; 1,0; 1,5</td><td>0,4; 2,5</td><td>0,75; 1,33</td><td>0.33</td><td>0,67; 1,5</td><td>0,67; 1,5</td></tr>
<tr><td>Folga</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td></tr>
</table>

4.1.4 Produtos

A razão de ser de uma companhia deve-se à existência de um mercado com a apetência para consumir um vasto e diversificado número de produtos, tendo esta a capacidade para satisfazer parte ou todas as necessidades do mercado, num determinado nicho de produtos. Nesta secção mostra-se como a companhia poderá ver a procura do mercado para os produtos que fabrica sob o ponto de vista do *layout* e como esta procura afecta o processo que ocorre na planta que se pretende projectar.

Um mercado ideal para uma companhia é aquele que regista uma procura constante ao longo do tempo para os produtos que esta aí coloca. No entanto, um mercado destes não existe, tendo a companhia de se adaptar às suas constantes mudanças. Esta situação implica que o projecto de uma nova fábrica, ou a reformulação de uma já existente, obrigue a que se estime o volume da procura dos produtos durante o tempo de vida útil da fábrica. O volume da procura é dado pela quantidade de produtos de um dado tipo a produzir por unidade de tempo.

O conhecimento dos produtos que vão ser produzidos na nova fábrica é determinante na escolha do processo a usar. No entanto, é o volume previsto de produtos a produzir que determina a capacidade da planta, condicionando a tomada de decisões que fazem com que a planta seja eficiente na produção, nomeadamente na escolha da melhor disposição para as instalações no interior da planta. A escolha da melhor disposição das instalações depende essencialmente do fluxo de materiais ou da frequência de viagens efectuadas pelo equipamento de transporte entre as instalações, e este fluxo depende por sua vez das quantidades a produzir de cada produto.

Para calcular o fluxo entre instalações, é necessário, para além do conhecimento do volume de produtos a produzir, efectuar a decomposição dos produtos nas várias partes que os compõem. É óbvio que esta decomposição se limita às partes que são processadas na planta. Esta decomposição dos produtos nas suas partes é feita de acordo com o Plano Necessidades de Material[3]. Para cada uma destas partes deve ser calculada a quantidade necessária (valor da procura da parte), sendo esta proporcional ao somatório das partes que participam em cada um dos produtos finais. Desta forma, e de forma interna à planta, os produtos finais e as partes que participam no fabrico dos produtos, são tratados simplesmente por partes. A informação que descreve as partes é dada na forma:

NP é o número de partes processadas na planta;

P_k é a parte k ;

C_k é a capacidade de produção para a parte k de acordo com a estimativa da sua procura;

O_{ikl} é o número de ordem da operação l que se realiza na instalação da classe i, à parte k, na sequência de operações.

4.1.5 Processo de Produção

Conhecendo quais são as partes a fabricar na planta e qual a quantidade produzida de cada uma por unidade de tempo, é necessário conhecer a sequência das operações para determinar o fluxo de materiais entre as instalações. A decomposição de todos os produtos nas suas partes mais simples resulta em sequências de operações de visita às instalações. A Tabela 4-3 mostra um exemplo simples onde se identifica a procura para cinco partes produzidas na planta e onde se descreve a ordem de visita destas às classes de instalações onde são realizadas as respectivas operações. Refira-se que a instalação concreta de cada classe de instalações para realizar as operações não é conhecida na fase de projecto de *layout* quando existir mais do que uma instalação da mesma classe.

Para especificar as sequências de operações, tendo em conta a completa decomposição dos produtos nas suas partes mais simples, processadas na planta, os dados em jogo são dados na forma:

---

[3] Do termo em inglês *Material Requirements Plan* (MRP).

NO_k é o número de operações a realizar à parte k ;

NO_{ik} é o número de operações a realizar à parte k na instalação da classe i ;

O_{ikl} é o número de ordem da operação l que se realiza na instalação da classe i, à parte k, na sequência de operações;

$\{C_{kiu}\}$ é uma lista com valores que representam o número de partes k processadas na instalação u, da classe i, por unidade de tempo;

L_k é o tamanho do lote de transporte da parte k ;

T_k é o valor que dá o custo de transporte para cada parte k. Este valor pode ser um dado qualitativo ou um dado quantitativo, como por exemplo o tempo gasto por cada parte e por unidade de distância.

Tabela 4-3: Necessidades e sequência de operações para as partes.

Partes	**Procura**	**Instalações visitadas**	**Lote de Transporte**	**Composição**
P1	800	A→B→D→E→F	16	-
P2	400	B→C→G→D→I→E	10	-
P3	400	B→G→C→F→I→J	10	2×P1 + 1×P2
P4	200	G→B→F→A→F	6	2×P3
P5	100	E→B→J→H→I	8	1×P3

O valor do fluxo entre as classes de instalações pode agora ser calculado. A expressão (4-3) permite o cálculo do fluxo para uma dada parte k entre as instalações da classe i e j. De notar que este valor de fluxo é diferente de zero, apenas quando os pares de operações considerados correspondem a operações consecutivas. O valor total do fluxo entre as instalações da classe i e j para todas as partes, é dado pela expressão (4-4).

$$F_{ij}^{k} = \begin{cases} \dfrac{T_k \times C_k}{L_k} & se \quad \left|O_{ikl} - O_{jkw}\right| = 1 \\ \\ 0 & caso \quad contrário \end{cases} \tag{4-3}$$

$$f_{ij}^{1} = \sum_{k=1}^{NP} F_{ij}^{k} \tag{4-4}$$

Este cálculo dos valores de fluxo entre classes de instalações coincide com o fluxo entre instalações apenas quando existe uma instalação de cada classe. Quando existe mais do que uma instalação da mesma classe, é necessário determinar como se distribui o fluxo entre as diferentes instalações. Na fase do projecto de *layout* o encaminhamento de material não é completamente conhecido, só podendo ser determinado numa fase posterior de operação da planta instalada, após a resolução de problemas de escalonamento. Durante esta fase de disposição das instalações na planta só são conhecidas quais as classes de instalações que uma parte tem de visitar. Deste modo, considera-se que o fluxo para as instalações da mesma classe é proporcional à quantidade de partes processadas por cada instalação e por unidade de tempo. O fluxo entre a instalação *u* da classe *i* e a instalação *v* da classe *j*, relacionado com a parte *k*, é calculado segundo a expressão (4-5), sendo que C_{ik} e C_{jk} são dadas pela expressão (4-6). Estes valores C_{ik} e C_{jk} representam o número total de partes *k* processadas em todas as instalações da classe *i* e *j*, respectivamente. O fluxo total de todas as partes entre a instalação *u* da classe *i* e a instalação *v* da classe *j*, é então calculado pela expressão (4-7).

$$F_{iujv}^{k} = F_{ij}^{k} \times \frac{C_{iuk}}{C_{ik}} \times \frac{C_{jvk}}{C_{jk}} \tag{4-5}$$

$$C_{ik} = \sum_{u=1}^{NI_i} C_{iuk} \tag{4-6}$$

$$f_{iujv}^{1} = \sum_{k=1}^{NP} F_{iujv}^{k} \tag{4-7}$$

Os valores de fluxo que foram referidos até ao momento relacionam-se apenas com o transporte entre instalações para operações realizadas à mesma parte. O transporte de subpartes para uma instalação que realiza uma operação que agrupa subpartes numa parte mais complexa, não é directamente tratado (Figura 4-4).

Quando o custo deste tipo de transporte não é desprezável é sempre possível considerar que a última operação de processamento de uma subparte consiste no seu armazenamento num dado local de armazenagem (instalação), e que a primeira operação de uma parte que irá incorporar subpartes consiste em retirar as subpartes do armazém. No entanto, nem sempre é possível efectuar esta aproximação e, como tal, é necessário considerar informação adicional que trate o fluxo devido à incorporação de subpartes numa parte mais complexa. Esta informação adicional é dada na forma:

k é a parte k que é composta por subpartes;

NSP_k é o número de subpartes que compõem a parte k;

$\{P_l\}$ é a lista de subpartes que compõem a parte k ;

$\{q_{kl}\}$ é uma lista de valores, correspondendo cada um à quantidade de subpartes l que participam na parte k.

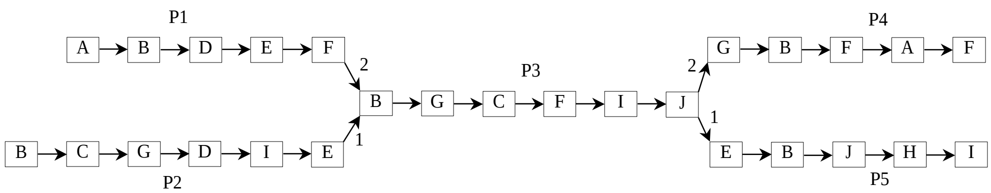

Figura 4-4: Incorporação hierárquica de subpartes em partes mais complexas ou mesmo em produtos finais.

Com esta informação o cálculo do fluxo resultante da incorporação numa parte, de várias subpartes, é realizado usando a expressão (4-8). O fluxo total, da incorporação de todas as subpartes em todas as partes, pode então ser calculado usando a expressão (4-9). O conjunto de todos os valores de fluxo entre todos os pares de instalações, permite construir a matriz de fluxo (4-10).

$$F_{iujv}^{kl} = \begin{cases} \dfrac{T_l \times C_k \times q_l}{L_l} \times \dfrac{C_{iuk}}{C_{ik}} \times \dfrac{C_{jvk}}{C_{jk}} & se \quad O_{iku} = 1 \quad e \quad O_{jkv} = NO_l \\ 0 & caso \quad contrário \end{cases} \tag{4-8}$$

$$f_{iujv}^{2} = \sum_{k=1}^{NP} \sum_{l \in \{P_l\}}^{NSP_k} F_{iujv}^{kl} \tag{4-9}$$

$$f_{iujv}^{M} = f_{iujv}^{1} + f_{iujv}^{2} \tag{4-10}$$

De referir que, quando uma parte é incorporada numa outra parte ou possivelmente em mais partes, a capacidade (C_k), para processar essa parte na planta, deve ser capaz de satisfazer as necessidades dessas partes.

Atendendo à forma descrita de cálculo do fluxo entre pares de instalações, o custo de uma solução, para a disposição das instalações na planta, é dada pela expressão (4-11), em que d_{ij} é a distância entre as instalações i e j, sendo esta dada usualmente, por uma métrica euclidiana ou rectilínea. Esta distância depende, obviamente, do local em que são colocadas as instalações.

$$Custo = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} \sum_{u=1}^{NI_i} \sum_{v=1}^{NI_j} f_{iujv}^{M} \times d_{iujv} \qquad (4\text{-}11)$$

4.2 Resolução de PPLI Recorrendo à PLR(*DF*)

Depois de estabelecer quais são os requisitos de informação para a resolução de PPLI e a forma como a planta, as instalações e os processos são modelados de acordo com os problemas de *layout*, é necessário definir como este tipo de problemas pode ser solucionado usando a PLR(*DF*).

4.2.1 Variáveis

O resultado da resolução de um PPLI consiste, de uma forma simplificada, na escolha do melhor local para posicionar as diferentes instalações na planta. Este local é especificado pelas coordenadas cartesianas das instalações relativamente à planta. O modelo usado para as instalações assume também que estas possuem um forma rectangular. Esta forma rectangular é conhecida a partir de valores de comprimento e de largura, que como se referiu, podem não ser constantes, ao contrário do valor da área mínima que é sempre constante. Deste modo, é também necessário determinar quais os melhores valores para o comprimento e para a largura. Como consequência, a resolução de PPLI requer quatro variáveis de decisão para cada instalação, o que corresponde a criar quatro variáveis de domínio na PLR(*DF*).

Relativamente às coordenadas das instalações, é ainda necessário definir qual o ponto de referência da instalação. Normalmente, podem-se encontrar duas situações. Na primeira situação o ponto de referência das instalações coincide com o canto inferior esquerdo, como nos trabalhos devidos a Heragu e Kusiak (1991). Na outra situação o ponto de referência das instalações coincide com o ponto central, sendo esta a via seguida, por exemplo, por Montreuil *et al.* (1993). A primeira situação foi também seguida nos trabalhos já publicados por Tavares *et al.* (1998; 1999a; 1999b) na resolução de PPLI usando PLR(*DF*). Nesta tese opta-se por seguir uma aproximação em que o ponto de referência das instalações coincide com o ponto central das mesmas.

Os modelos de PPLI, como os descritos no capítulo 2, consideram variáveis de decisão que tomam valores no conjunto dos números reais. Na PLR(*DF*) as variáveis de decisão podem tomar apenas valores num subconjunto de números inteiros. Os requisitos de informação discutidos na secção 4.1 sugerem, por outro lado, variáveis de decisão com valores reais. É importante, por conseguinte, ter em conta este aspecto, na medida em que é necessário efectuar a conversão de valores reais para valores inteiros, com a consequente perda de precisão. Dependendo da precisão que se pretende, por vezes será necessário afectar os valores por um dado factor de escala, antes de se efectuar a conversão.

Relativamente às coordenadas das instalações, o seu domínio tem de contemplar as dimensões da planta, que como se referiu possui uma forma rectangular. Deste modo, o domínio das coordenadas é condicionado pelas restrições:

$$X_{iu} \in 0 \,..\, C\text{-}1 \tag{4-12}$$

$$Y_{iu} \in 0 \,..\, L\text{-}1 \tag{4-13}$$

em que:

X_{iu} representa a coordenada *x* da posição da instalação *u* da classe *i*;

Y_{iu} representa a coordenada *y* da posição da instalação *u* da classe *i*;

C é o comprimento do rectângulo que envolve a planta;

L é a largura do rectângulo que envolve a planta.

Como se considera que o ponto central das instalações coincide com o seu ponto de referência, apenas metade do comprimento e da largura das instalações necessitam de serem considerados, como acontece no modelo proposto por Montreuil *et al.* (1993). Atendendo aos requisitos de informação já referidos, podem-se identificar três situações:

- o comprimento e largura da instalação são conhecidos, sendo apenas necessário escolher a sua melhor orientação na planta;
- é especificada a área mínima e um intervalo de valores da RA para a forma da instalação (razão de aspecto);
- é especificada a área mínima e um conjunto discreto de valores para a forma da instalação.

Na primeira situação trata-se a orientação da instalação de uma forma implícita. O domínio das variáveis associadas ao comprimento e à largura da instalação possui no máximo dois valores. Quando os valores do comprimento e da largura são iguais, então o domínio das variáveis que lhes está associado é criado com um só valor e, portanto, estas ficam naturalmente instanciadas. No caso geral, em que o valor do comprimento é diferente do da largura, o domínio das respectivas variáveis é dado na forma:

$$C_{iu} \in [c_{iu}, l_{iu}] \tag{4-14}$$

$$L_{iu} \in [c_{iu}, l_{iu}] \tag{4-15}$$

onde

C_{iu} é a variável de domínio que representa a metade do valor do comprimento da instalação u da classe i ;

L_{iu} é a variável de domínio que representa a metade do valor da largura da instalação u da classe i ;

c_{iu} é metade do valor do comprimento da instalação u da classe i ;

l_{iu} é metade do valor da largura da instalação u da classe i.

Se os valores c_{iu} e l_{iu} não são iguais, então deve ser adicionada a restrição (4-16), com o objectivo de se assegurar que a instalação não terá uma forma quadrada, e com uma área diferente da necessária.

$$C_{iu} \neq L_{iu} \tag{4-16}$$

Relativamente à segunda situação, em que se pretende encontrar qual a melhor forma para a instalação a partir de conjunto de formas possíveis, dado sob a forma de um intervalo, às variáveis de domínio para o comprimento e a largura das instalações são associadas as restrições:

$$C_{iu} \in ci_{iu}..cs \tag{4-17}$$

$$L_{iu} \in li_{iu}..ls_{iu} \tag{4-18}$$

onde:

- ci_{iu} é o valor mínimo do domínio para a variável que representa a metade do comprimento da instalação u da classe i ;
- li_{iu} é o valor mínimo do domínio para a variável que representa a metade da largura da instalação u da classe i ;
- cs_{iu} é o valor máximo do domínio para a variável que representa a metade do comprimento da instalação u da classe i ;
- ls_{iu} é o valor máximo do domínio para a variável que representa a metade da largura da instalação u da classe i.

O cálculo dos valores ci_{iu} , li_{iu} , cs_{iu} e ls_{iu} é efectuado considerando expressões similares às expressões (4-1) e (4-2). Como o conjunto de valores RA_{iu} é dado sob a forma de um intervalo de valores, estes quatro valores ci_{iu} , li_{iu} , cs_{iu} e ls_{iu} , que definem os limites dos domínios para as variáveis C_{iu} e L_{iu} (denotar que há arredondamentos[4] que se têm de efectuar) são dados pelas expressões seguintes:

---

[4] Os arredondamentos podem ser feitos tanto pela função tecto $\lceil x \rceil$, que retorna o menor valor inteiro superior ou igual a x, ou pela função chão $\lfloor x \rfloor$, que retorna o maior valor inteiro inferior ou igual a x

$$li_{iu} = \left\lfloor \frac{\sqrt{min\{RA_{iu}\} \times A_{iu}}}{2} \right\rfloor \qquad (4\text{-}19)$$

$$ls_{iu} = \left\lceil \frac{\sqrt{max\{RA_{iu}\} \times A_{iu}}}{2} \right\rceil \qquad (4\text{-}20)$$

$$ci_{iu} = \left\lfloor \frac{\sqrt{A_{iu} \times {}^{1}\!/\!{}_{max\{RA_{iu}\}}}}{2} \right\rfloor \qquad (4\text{-}21)$$

$$cs_{iu} = \left\lceil \frac{\sqrt{A_{iu} \times {}^{1}\!/\!{}_{min\{RA_{iu}\}}}}{2} \right\rceil \qquad (4\text{-}22)$$

Após a definição dos domínios para as variáveis L_{iu} e C_{iu}, é ainda necessário ter em conta a restrição:

$$4 \times C_{iu} \times L_{iu} = A_{iu} \qquad (4\text{-}23)$$

que assegura que a área mínima da instalação é a considerada.

Esta restrição (4-23) é uma restrição com termos não lineares, dado que é dada por um produto entre duas variáveis de domínio. Este facto contribui para que a propagação da restrição, efectuada por um meta-interpretador de PLR(*DF*) na resolução de problemas, nem sempre seja a melhor. Verifica-se que na maior parte dos meta-interpretadores de PLR(*DF*) as restrições com termos não lineares apresentam uma qualidade de propagação mais fraca que as restrições que possuem apenas termos lineares.

Um aspecto importante que se deve realçar com implicações na forma das instalações, quando esta é determinada a partir de um intervalo de valores da *RA*, relaciona-se com o domínio das variáveis que assinalam o comprimento e a largura das instalações. Considerando a restrição (4-23) e o facto de que na PLR(*DF*) os domínios são constituídos por intervalos ou conjuntos de valores inteiros, apenas alguns valores do domínio inicial das variáveis relacionadas com o comprimento e largura das instalações são considerados. Como consequência apenas algumas soluções são avaliadas para a escolha da melhor forma das instalações.

Para ilustrar esta discretização da forma das instalações considere-se, por exemplo, uma das instalações da classe *C* da Tabela 4-1. Esta possui como requisitos uma área de 3000 unidades e admite formas com uma *RA* que vai de 0,20 até 5,0. A Tabela 4-4 mostra os valores para os limites do domínio das variáveis que denotam o comprimento e a largura da instalação considerando escalonamentos de 1 e 10.

Tabela 4-4: Limites para o domínio das variáveis associadas ao comprimento e largura duma instalação da classe *C*.

Escala	li_{iu}	ls_{iu}	ci_{iu}	cs_{iu}
1:1	12 (12,247)	62 (61,237)	12 (12,247)	62 (61,237)
10:1	122 (122,474)	613 (612,372)	122 (122,474)	613 (612,372)

Dado que as variáveis de domínios finitos apenas podem tomar valores discretos (intervalo de valores inteiros), apenas algumas formas para as instalações são válidas. Para um factor de escala de 1 são possíveis quatro formas, como se mostra na Tabela 4-5 e na Figura 4-5, enquanto com um factor de escala de 10 são possíveis oito formas (Tabela 4-6).

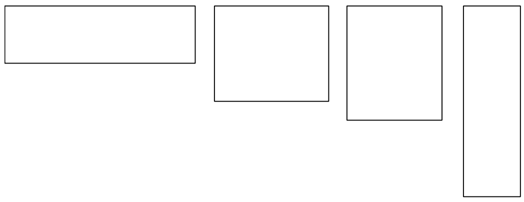

Figura 4-5: Quatro possibilidades para a forma de uma instalação cujos valores do comprimento e da largura podem variar entre 12 e 62.

Tabela 4-5: As dimensões possíveis para uma dada instalação.

Área = 3000	$C \in$ 12 .. 62	$L \in$ 12 .. 62
1	15	50
2	25	30
3	30	25
4	50	15

Tabela 4-6: As dimensões possíveis para uma dada instalação.

Área = 300000	$C \in$ 122 .. 613	$L \in$ 122 .. 613
1	125	600
2	150	500
3	200	375
4	250	300
5	300	250
6	375	200
7	500	150
8	600	125

Finalmente, quando os valores RA_{iu} são fornecidos sob a forma de um conjunto de valores, é necessário considerar, na definição dos domínios para C_{iu} e L_{iu} , cada uma das formas do conjunto. Para isso, em função da área e do conjunto de formas, elabora-se um conjunto com todos os comprimentos possíveis para a instalação ($\{c_{iu}\}$) assim como um outro com todas as larguras correspondentes ($\{l_{iu}\}$). Com o conjunto de valores de comprimento e o conjunto de valores de largura são colocadas as restrições (4-24) e (4-25). Estas restrições[5] permitem estabelecer uma dependência funcional entre os valores de comprimento e os valores de largura de uma instalação pelo uso da variável de domínio auxiliar I_{iu}, e, como tal, a ordem dos valores no conjunto é importante.

$$element(I_{iu}, \{c_{iu}\}, C_{iu}) \tag{4-24}$$

$$element(I_{iu}, \{l_{iu}\}, L_{iu}) \tag{4-25}$$

Para o cálculo de cada par comprimento-largura é necessário considerar as questões de arredondamento e que os valores a reter são metade do valor total do comprimento e da largura das instalações. Para cada uma das formas da instalação, o arredondamento pode ser dado através do algoritmo:

1. determinar os valores das expressões (4-26), (4-27), (4-28) e (4-29) que denotam os valores inteiros (mínimos e máximos) mais próximos do valor

[5] A restrição *element*/3 foi já descrita na secção 3.3.2.

real do comprimento e da largura da instalação;

2. para cada combinação possível dos valores das expressões referidas em 1 ($l \times c$), calcular a área da instalação;

3. escolher a combinação de valores que dá a menor área que é porem superior à área mínima atribuída à instalação correspondente.

$$l_{iu}^{+} = \left\lceil \frac{\sqrt{RA_{iu} \times A_{iu}}}{2} \right\rceil \tag{4-26}$$

$$l_{iu}^{-} = \left\lfloor \frac{\sqrt{RA_{iu} \times A_{iu}}}{2} \right\rfloor \tag{4-27}$$

$$c_{iu}^{+} = \left\lceil \frac{\sqrt{A_{iu} \times {}^{1}\!/_{RA_{iu}}}}{2} \right\rceil \tag{4-28}$$

$$c_{iu}^{-} = \left\lfloor \frac{\sqrt{A_{iu} \times {}^{1}\!/_{RA_{iu}}}}{2} \right\rfloor \tag{4-29}$$

Para ilustrar a construção dos domínios das variáveis que denotam o comprimento e a largura de uma instalação quando sua forma é dada sob a forma de um conjunto discreto de valores de RA, considere-se, como exemplo, a instalação da classe H (Tabela 4-1). Esta possui como requisitos uma área de 2800 unidades e admite três formas {0,5; 1,0; 1,5}. Considerando os cálculos indicados na Tabela 4-7, e de acordo com o critério referido, os valores escolhidos para o domínio das variáveis são aqueles que na tabela surgem a negrito. O domínio destas variáveis é então especificado com as restrições ilustradas pelo segmento de código seguinte:

element(I, [18, 26, 32], L), *element*(I, [39, 27, 22], C)

O domínio das variáveis que representam as coordenadas, definidos por (4-12) e (4-13), não suficientes para impedir que parte do espaço ocupado por cada uma das instalações não pertença à planta. Para que as instalações sejam posicionadas dentro da planta devem ser consideradas as variáveis de decisão C_{iu} e L_{iu} (comprimento e largura). Desta forma, devem ser consideradas as seguintes restrições:

$$X_{iu} \geq C_{iu} \tag{4-30}$$

$$X_{iu} + C_{iu} \leq C \tag{4-31}$$

$$Y_{iu} \geq L_{iu} \tag{4-32}$$

$$Y_{iu} + L_{iu} \leq L \tag{4-33}$$

Tabela 4-7: Escolha dos valores para o domínio das variáveis correspondentes ao comprimento e à largura de uma instalação.

Forma	l_{iu}^{+}	l_{iu}^{-}	c_{iu}^{+}	c_{iu}^{-}	Área
0,5	19		39		2964
		18		38	2736
	19			38	2888
		18	**39**		**2808**
1,0	27		27		2916
		26		26	2704
	27			26	2808
		26	**27**		**2808**
1,5	33		22		2904
		32		21	2688
	33			21	2772
		32	**22**		**2816**

Finalmente, resta referir que as áreas que não pertencem à planta, quando esta possui uma forma real que não é rectangular, não são tratadas com a forma como se caracterizou os domínios das variáveis de decisão efectuada nesta secção. Estas áreas serão excluídas das possíveis soluções para o problema, a partir da utilização de um tipo especifico de restrições, que será abordado na secção seguinte.

4.2.2 Restrições

Na resolução de um PPLI, as instalações devem ser dispostas na planta de modo a satisfazer determinadas restrições. Algumas destas restrições são comuns para todas as instâncias do problema, tal como é o caso das restrições que impedem que as instalações se sobreponham no espaço que ocupam na planta. Há outras restrições como as que devem traduzir as especificidades e requisitos de cada instância particular do problema. Estes requisitos específicos podem-se caracterizar em restrições tecnológicas, geométricas, espaciais, ambientais e estratégicas, entre outras, e devem ser indicadas pelo projectista ao sistema[6]. É ainda possível considerar um terceiro grupo de restrições que podem dirigir o processo de procura das melhores soluções. Estas restrições podem traduzir tanto particularidades do problema em análise, como a experiência dos peritos.

De modo a tratar as mais variadas instâncias de PPLI, tendo em conta as três categorias de restrições discutidas, e em especial as relacionadas com a especificidade de cada instância do problema, foi identificado um conjunto de restrições tipo. Considerando que os PPLI têm como objectivo obter soluções para arranjos espaciais de instalações, estas restrições são fundamentalmente restrições geométricas, sendo apresentadas a seguir:

- **Não sobreposição**; ou seja, as instalações dispostas na planta não se devem sobrepor;
- **Vizinhança**; ou seja, a disposição de duas instalações na planta deve ser feita de modo a que estas fiquem lado a lado;
- **Distância**; ou seja, há que assegurar que as instalações sejam posicionadas de acordo com uma dada relação de distância ou que uma dada instalação seja posicionada a uma dada distância de um dado ponto. Por exemplo, se se tem uma situação em que uma determinada instalação precisa de operar num ambiente de temperatura controlada, não necessariamente compatível com o de outras instalações que de outra forma poderiam ser colocadas na vizinhança;
- **Posição absoluta**; ou seja, tem que ser possível forçar que uma dada

[6] Neste contexto entende-se por sistema um ou mais procedimentos computacionais baseados na tecnologia das restrições destinada a solucionar PPLI.

instalação seja posicionada dentro ou fora de uma determinada área da planta. É assim possível reservar espaços para diferentes propósitos, como, por exemplo, para escritórios ou armazéns. Esta restrição é também usada para impedir que as instalações sejam colocadas em áreas que não pertencem à planta, quando esta não é rectangular;

- **Posição relativa**; ou seja, situação que envolve sempre duas instalações e permite tratar situações do tipo "dispor a instalação *A* à direita da instalação *B*". Há quatro possibilidades para estes tipo de restrição: "à direita de", "à esquerda de", "à frente de" e "atrás de".

- **Orientação**; ou seja, medida que é usada para restringir a orientação duma instalação na planta, ou para assegurar uma relação de orientação entre duas instalações, isto é, duas instalações devem ter a mesma orientação ou orientação diferentes.

Uma análise mais detalhada deste tipo de restrições, nomeadamente no que se refere às relações que estabelecem entre as diferentes variáveis do problema, é dada nas subsecções seguintes. A notação seguida para a descrição das restrições é uma versão simplificada da mencionada anteriormente que não considera as classes de instalação, antes as tratando sem distinguir a que classe cada uma pertence.

Impedir a Sobreposição de Instalações

Como se referiu, a restrição que estará sempre presente, é aquela que impede a sobreposição das instalações na planta. A consideração desta restrição para todos os pares de instalações possíveis, assegura a geração de soluções em que as instalações não se sobrepõem, com apenas um simples procedimento de etiquetagem de todas as variáveis do problema.

A nomeação desta restrição é feita considerando duas instalações, a instalação i e a instalação j, e é colocada para todos os pares possíveis de instalações. Para além das variáveis de domínio relacionadas com as coordenadas, comprimento e largura, deve-se ainda considerar o espaço de folga de cada instalação, como ilustra a Figura 4-6. Na sua forma mais simples esta restrição é dada por (4-34), sendo o valor de f_{ij}

dado pela expressão (4-35). De uma forma semelhante à restrição (3-10) do problema dos quadrados perfeitos, esta restrição fixa que a instalação *i* deve estar ou à esquerda, ou à direita, ou à frente ou atrás da instalação *j*.

$$\begin{aligned}&\left(x_i + c_i + f_{ij} \le x_j - c_j\right) \vee \left(x_j + c_j + f_{ij} \le x_i - c_i\right) \vee \\ &\left(y_i + l_i + f_{ij} \le y_j - l_j\right) \vee \left(y_j + l_j + f_{ij} \le y_i - l_i\right)\end{aligned} \quad (4\text{-}34)$$

$$f_{ij} = max\left(f_i, f_j\right) \quad (4\text{-}35)$$

Uma alternativa para a formulação da restrição de "não sobreposição" passa por se usarem quatro novas variáveis (booleanas). Na realidade, usando PLR(*DF*), estas são variáveis cujo domínio é dado pelo conjunto {0,1}. A restrição é então dada pelas produções (4-36) a (4-40). Esta via para a restrição de "não sobreposição", permite eliminar as disjunções, que usualmente dão origem a uma propagação de pior qualidade.

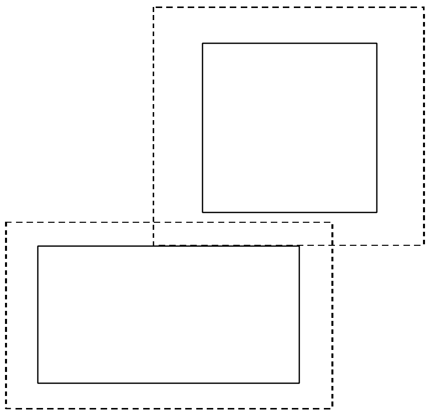

Figura 4-6: Disposição de duas unidades de produção lado a lado, tendo em conta as suas folgas.

$$\left(b_{ij}^x = 1 \Leftrightarrow x_i + c_i + f_{ij} \le x_j - c_j\right) \wedge \left(b_{ij}^x = 0 \Leftrightarrow x_i + c_i + f_{ij} > x_j - c_j\right) \quad (4\text{-}36)$$

$$\left(b_{ji}^x = 1 \Leftrightarrow x_j + c_j + f_{ji} \le x_i - c_i\right) \wedge \left(b_{ji}^x = 0 \Leftrightarrow x_j + c_j + f_{ji} > x_i - c_i\right) \quad (4\text{-}37)$$

$$\left(b_{ij}^y = 1 \Leftrightarrow y_i + l_i + f_{ij} \le y_j - l_j\right) \wedge \left(b_{ij}^y = 0 \Leftrightarrow y_i + l_i + f_{ij} > y_j - l_j\right) \quad (4\text{-}38)$$

$$\left(b_{ji}^y = 1 \Leftrightarrow y_j + l_j + f_{ji} \le y_i - c_i\right) \wedge \left(b_{ji}^y = 0 \Leftrightarrow y_j + l_j + f_{ji} > y_i - l_i\right) \quad (4\text{-}39)$$

$$1 \le b_{ij}^x + b_{ji}^x + b_{ij}^y + b_{ji}^y \le 2 \quad (4\text{-}40)$$

Embora esta última formulação da restrição "não sobreposição" pareça à partida mais complexa, pode, no entanto, ser mais eficiente em termos de propagação. Recorde-se que o meta-interpretadores da PLR(*DF*) são incompletos e, portanto, formas diferentes de especificar a mesma restrição podem originar uma qualidade da propagação bastante diversa. Adicionalmente, usando uma boa heurística para a escolha da ordem das variáveis a instanciar no procedimento de etiquetagem das variáveis de domínio, que inclua as variáveis booleanas referidas em epígrafe podem-se obter ganhos computacionais significativos.

Distância

A restrição de distância envolve o cálculo da distância entre um par de instalações ou o cálculo da distância de uma instalação a um ponto. A colocação desta restrição cria uma nova variável de domínio, que denota a distância entre duas instalações ou a distância de uma instalação a um ponto. O domínio desta variável é dado pelo intervalo de valores que a distância pode tomar a cada momento.

Um aspecto importante aqui a considerar tem a ver com a métrica utilizada. Das diversas alternativas que se poderiam visionar, e por razões de simplicidade, são equacionadas apenas as métricas rectilínea e euclidiana.

A determinação de uma distância entre instalações envolve normalmente o cálculo do valor absoluto da diferença entre dois valores, especialmente no que se refere à métrica rectilínea. Por este motivo, é necessário definir uma restrição módulo ou valor absoluto da diferença entre dois valores. A formulação desta restrição é dada pelas expressões (4-41), (4-42) e (4-43):

$$|u-v| = \left(b^{+} \times u\right) - \left(b^{+} \times v\right) + \left(b^{-} \times v\right) - \left(b^{-} \times u\right) \tag{4-41}$$

$$\left(b^{+} = 1 \Leftrightarrow u \geq v\right) \wedge \left(b^{+} = 0 \Leftrightarrow u < v\right) \tag{4-42}$$

$$\left(b^{-} = 1 \Leftrightarrow u < v\right) \wedge \left(b^{-} = 0 \Leftrightarrow u \geq v\right) \tag{4-43}$$

Distância entre Pares de Instalações

Por vezes é desejável, ou mesmo necessário, que duas instalações sejam dispostas de forma a que estejam a uma certa distância. Esta situação pode ocorrer, por exemplo, quando algumas instalações precisam de operar num ambiente de temperatura controlada, o que não é compatível com a operação de outras que poderiam ser dispostas na vizinhança. Esta situação de incompatibilidade obriga a que se posicionem as instalações a uma distância entre elas, que seja a maior possível.

Para formular a restrição de distância entre duas instalações, para além da escolha da melhor métrica, é necessário definir um referencial. Das duas situações que são consideradas, a primeira considera que a distância é medida relativamente ao centro das instalações, enquanto que na segunda situação a distância é medida relativamente à periferia das instalações. A Figura 4-7 mostra como é medida a distância, considerando o centro ou a periferia como referência.

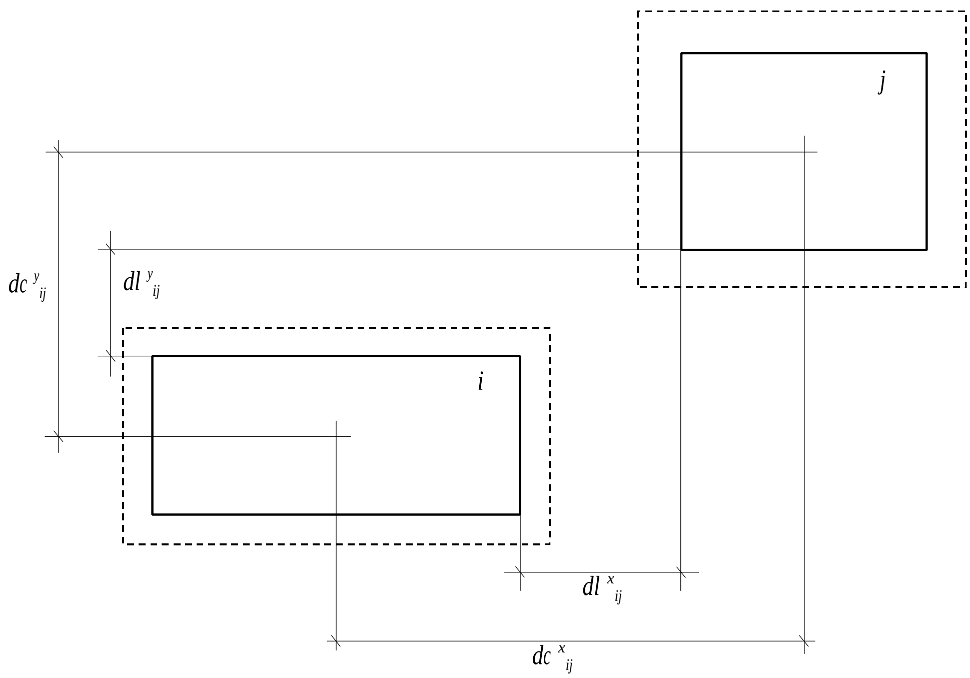

Figura 4-7: Distância entre duas instalações segundo cada um dos eixos coordenados e considerando como referência o seu centro ou a sua periferia.

Começando pela primeira situação, a relação de distância relativamente ao centro das instalações é a mais simples de estabelecer. As produções (4-44) e (4-45) estabelecem a relação de distância segundo cada um dos eixos coordenados. A produção (4-46) estabelece a relação de distância relativamente ao centro da instalação usando uma métrica rectilínea, enquanto que a produção (4-47) estabelece a mesma relação de distância usando uma métrica euclidiana.

$$dc_{ij}^{x} = \left| x_i - x_j \right| \tag{4-44}$$

$$dc_{ij}^{y} = \left| y_i - y_j \right| \tag{4-45}$$

$$dc_{ij} = dc_{ij}^{x} + dc_{ij}^{y} \tag{4-46}$$

$$dc_{ij} \times dc_{ij} = dc_{ij}^{x} \times dc_{ij}^{x} + dc_{ij}^{y} \times dc_{ij}^{y} \tag{4-47}$$

Na segunda situação, a relação de distância relativamente à periferia das instalações é ligeiramente mais complexa de estabelecer. A distância à periferia considera as distâncias medidas relativamente aos lados mais próximos de cada uma das instalações que se apresentam paralelos entre si, bem como o comprimento e a largura destas. Para melhor compreender em que consiste esta forma de cálculo de distância, bem como esta pode ser realizada, considere-se o exemplo da Figura 4-8, que mostra três possíveis formas de disposição de duas instalações. Na primeira situação a instalação *i* está completamente à esquerda da instalação *j*, e na segunda situação a instalação *i* está completamente à direita da instalação *j*, e portanto, a distância segundo *x* é diferente de zero. Na terceira situação a distância em *x* é zero porque nenhuma das instalações está completamente à esquerda ou completamente à direita da outra. Uma análise similar pode ser efectuada para as distâncias em *y*.

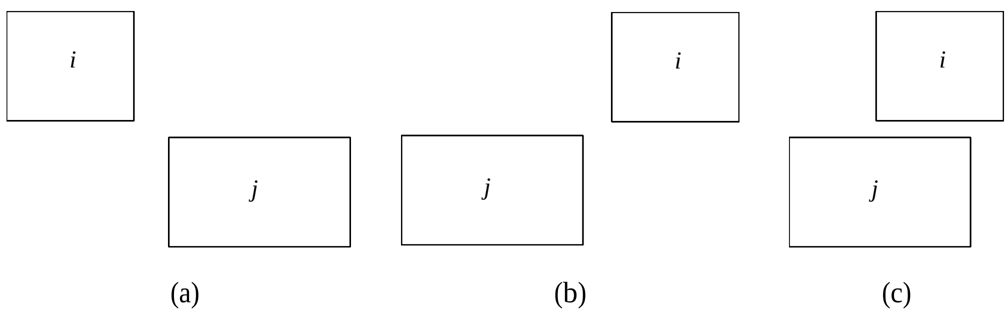

Figura 4-8: Posições relativas determinantes para o cálculo da distância relativamente à periferia. Nos casos (a) e (b) a distância é a soma das distâncias em *x* e em *y*, enquanto no caso (c) a distância total é igual à distância em *y*.

Face ao exposto, pode-se dizer que duas instalações estão separadas em *x* se uma está disposta completamente à esquerda ou completamente à direita da outra. De igual modo duas instalações estão separadas em *y*, se uma está disposta completamente à frente ou completamente atrás da outra.

Para estabelecer esta relação de distância considere-se, em primeiro lugar, a distância em *x* e em *y*, independentemente de as duas instalações estarem separadas em *x* e em *y*. Estas distâncias são dadas, respectivamente, pelas produções (4-48) e (4-49).

$$dl_{ij}^{x} = \left|x_i - x_j\right| - c_i - c_j \tag{4-48}$$

$$dl_{ij}^{y} = \left|y_i - y_j\right| - l_i - l_j \tag{4-49}$$

Para calcular a distância total entre duas instalações é necessário considerar duas variáveis booleanas, uma que determina se as instalações estão separadas em *x* e outra que determina se estão separadas em *y*. As produções (4-50) e (4-51) dão, respectivamente, corpo a essa pretensão.

$$\begin{array}{l}\left(b_{ij}^{x} = 1 \Leftrightarrow \left(x_i + c_i < x_j - c_j\right) \vee \left(x_i - c_i > x_j + c_j\right)\right) \wedge \\ \left(b_{ij}^{x} = 0 \Leftrightarrow \left(x_i + c_i \geq x_j - c_j\right) \wedge \left(x_i - c_i \leq x_j + c_j\right)\right)\end{array} \tag{4-50}$$

$$\begin{array}{l}\left(b_{ij}^{y} = 1 \Leftrightarrow \left(y_i + l_i < y_j - l_j\right) \vee \left(y_i - l_i > y_j + l_j\right)\right) \wedge \\ \left(b_{ij}^{y} = 0 \Leftrightarrow \left(y_i + l_i \geq y_j - l_j\right) \wedge \left(y_i - l_i \leq y_j + l_j\right)\right)\end{array} \tag{4-51}$$

A partir do conhecimento das distâncias em *x* e em *y*, assim como a dos respectivos valores de separação, é possível calcular a distância entre duas instalações. A produção (4-52) estabelece a relação de distância relativamente à periferia, usando uma métrica rectilínea e a produção (4-53) estabelece a mesma relação de distância, usando uma métrica euclidiana.

$$dl_{ij} = \left(b_{ij}^{x} \times dl_{ij}^{x}\right) + \left(b_{ij}^{y} \times dl_{ij}^{y}\right) \tag{4-52}$$

$$dl_{ij} \times dl_{ij} = \left(b_{ij}^{x} \times dl_{ij}^{x} \times dl_{ij}^{x}\right) + \left(b_{ij}^{y} \times dl_{ij}^{y} \times dl_{ij}^{y}\right) \tag{4-53}$$

Distância a um Ponto

Tal como foi considerada a distância entre duas instalações, é possível considerar a distância do centro da instalação *i* a um ponto, ou a distância da sua periferia a um ponto.

Começando-se por considerar-se o centro da instalação *i* como o ponto de referência para a medida de distância a um ponto $p(x_p\ ,\ y_p)$, tem-se que as distâncias em *x* e em *y* são dadas, respectivamente, pelas produções (4-54) e (4-55).

$$dc_{ip}^{x} = \left| x_i - x_p \right| \tag{4-54}$$

$$dc_{ip}^{y} = \left| y_i - y_p \right| \tag{4-55}$$

A distância em linha recta é então dada pela equação (4-56), enquanto que a distância euclidiana é dada pela equação (4-57).

$$dc_{ip} = dc_{ip}^{x} + dc_{ip}^{y} \tag{4-56}$$

$$dc_{ip} \times dc_{ip} = \left(dc_{ip}^{x} \times dc_{ip}^{x} \right) + \left(dc_{ip}^{y} \times dc_{ip}^{y} \right) \tag{4-57}$$

O cálculo da distância de uma instalação *i* a um ponto $p(x_p\ ,\ y_p)$, tendo como referência a periferia da instalação, é obtida através do cálculo da distância em *x* e em *y*, em termos das produções (4-58) e (4-59).

$$dl_{ip}^{x} = \left| x_i - x_p \right| - c_i \tag{4-58}$$

$$dl_{ip}^{y} = \left| y_i - y_p \right| - l_i \tag{4-59}$$

Também neste caso é usada uma forma de separação, que vem na linha da separação entre duas instalações. Aqui a separação é entre uma instalação e um ponto. As produções (4-60) e (4-61) permitem obter, respectivamente, o valor de separação em *x* e em *y*.

$$\begin{aligned} &\left(b_{ip}^{x} = 1 \Leftrightarrow \left(x_i + c_i < x_p \right) \vee \left(x_i - c_i > x_p \right) \right) \wedge \\ &\left(b_{ip}^{x} = 0 \Leftrightarrow \left(x_i + c_i \geq x_p \right) \wedge \left(x_i - c_i \leq x_p \right) \right) \end{aligned} \tag{4-60}$$

$$\begin{aligned} &\left(b_{ip}^{y} = 1 \Leftrightarrow \left(y_i + l_i > y_p \right) \vee \left(y_i - l_i < y_p \right) \right) \wedge \\ &\left(b_{ip}^{y} = 0 \Leftrightarrow \left(y_i + l_i \leq y_p \right) \wedge \left(y_i - l_i \geq y_p \right) \right) \end{aligned} \tag{4-61}$$

As distâncias rectilínea e euclidiana entre a periferia da instalação *i* e o ponto *p*, são então dadas pelas equações (4-62) e (4-63).

$$dl_{ij} = \left(b_{ip}^{x} \times dl_{ij}^{x} \right) + \left(b_{ip}^{y} \times dl_{ij}^{y} \right) \tag{4-62}$$

$$dl_{ij} \times dl_{ij} = \left(b_{ip}^{x} \times dl_{ij}^{x} \times dl_{ij}^{x}\right) + \left(b_{ip}^{y} \times dl_{ij}^{y} \times dl_{ij}^{y}\right) \tag{4-63}$$

Vizinhança de Instalações

Em algumas situações é desejável dispor duas instalações lado a lado. Uma situação deste tipo pode surgir quando existe um grande fluxo de materiais entre as duas instalações. Refira-se que, quanto menor for a distância percorrida no transporte de material, menor é o custo de operação. Expressar este facto, pelo recurso a restrições, permite potenciar uma redução significativa do espaço de soluções. Uma restrição cuja finalidade seja a de impor que duas instalações sejam dispostas na planta ao lado uma da outra, permite que estas situações sejam tratadas. No entanto, pode acontecer que a disposição de algumas instalações lado a lado não seja só desejável, como seja um requisito do problema, que necessita de ser tratado pelo projectista do *layout*. O uso destas restrições requer, no entanto, uma utilização ponderada e criteriosa por parte do projectista, dado que pode transformar o problema original num novo problema para o qual não é possível encontrar qualquer tipo de soluções.

A restrição de vizinhança que aqui é mencionada surge sob duas formas. A primeira fixa apenas que duas instalações devem ser dispostas lado a lado. A segunda é uma forma mais restrita da primeira, sendo designada por restrição de adjacência.

No que se refere à primeira forma da restrição de vizinhança, esta é dada pela produção (4-64). Note-se que as questões relativas à sobreposição já se encontram asseguradas, pela restrição de "não sobreposição", dado que esta última está sempre presente, qualquer que seja o problema.

$$\begin{aligned} &\left(x_i + c_i + f_{ij} \geq x_j - c_j\right) \wedge \left(x_j + c_j + f_{ij} \geq x_i - c_i\right) \wedge \\ &\left(y_i + l_i + f_{ij} \geq y_j - l_j\right) \wedge \left(y_j + l_j + f_{ij} \geq y_i - l_i\right) \end{aligned} \tag{4-64}$$

Quanto à restrição de adjacência, esta é, como se referiu, uma versão mais restrita da restrição de vizinhança. Tal como a restrição de vizinhança, esta impõe que duas instalações devem ser vizinhas. Não entanto, o grau de vizinhança é mais forte, obrigando a que as instalações sejam dispostas na planta de tal forma que os centros geométricos das instalações fiquem a uma distância mínima.

A Figura 4-6 mostra um caso que satisfaz uma restrição de vizinhança, mas não satisfaz uma restrição de adjacência, ao contrário do exemplo ilustrado na Figura 4-9, que satisfaz ambas as restrições. Esta restrição de adjacência pode ser formulada em termos da produção (4-65) em que a função *max*(*x*) dá o maior valor do domínio de *x*.

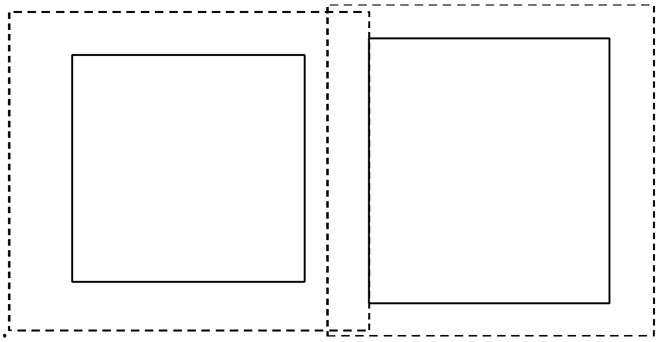

Figura 4-9: Um exemplo de disposição de duas instalações que satisfazem a restrição de adjacência.

$$\begin{pmatrix} x_i = x_j \wedge c_i = max(c_i) \wedge c_j = max(c_j) \wedge \\ \begin{pmatrix} y_i + l_i + f_{ij} = y_j - l_j \vee \\ y_j + l_j + f_{ij} = y_i - l_i \end{pmatrix} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} y_i = y_j \wedge l_i = max(l_i) \wedge l_j = max(l_j) \wedge \\ \begin{pmatrix} x_i + c_i + f_{ij} = x_j - c_j \vee \\ x_j + c_j + f_{ij} = x_i - c_i \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4\text{-}65)$$

Uma forma alternativa para equacionar a restrição de adjacência usa variáveis booleanas e recorre ao operador de cardinalidade. Esta forma alternativa é dada em termos das produções (4-66) a (4-73).

$$\#\left(b_{ij}^{x}, \left[x_i = x_j \wedge c_i = max(c_i) \wedge c_j = max(c_j)\right], b_{ij}^{x}\right) \quad (4\text{-}66)$$

$$\#\left(b_{ij}^{x+}, \left[y_i + l_i + f_{ij} = y_j - l_j\right], b_{ij}^{x}\right) \quad (4\text{-}67)$$

$$\#\left(b_{ij}^{x-}, \left[y_j + l_j + f_{ij} = y_i - l_i\right], b_{ij}^{x}\right) \quad (4\text{-}68)$$

$$\#\left(b_{ij}^{y}, \left[y_i = y_j \wedge l_i = max(l_i) \wedge l_j = max(l_j)\right], b_{ij}^{y}\right) \quad (4\text{-}69)$$

$$\#\left(b_{ij}^{y+}, \left[x_i + c_i + f_{ij} = x_j - c_j\right], b_{ij}^{y}\right) \quad (4\text{-}70)$$

$$\#\left(b_{ij}^{y-}, \left[x_j + c_j + f_{ij} = x_i - c_i\right], b_{ij}^{y}\right) \quad (4\text{-}71)$$

$$b_{ij}^{x+} + b_{ij}^{x-} + b_{ij}^{y+} + b_{ij}^{y-} = 1 \tag{4-72}$$

$$b_{ij}^{x} + b_{ij}^{y} = 1 \tag{4-73}$$

Posição das Instalações

Dois tipos de restrições relacionados com a posição de instalações podem ser definidos. Um primeiro tipo, designado por restrições de posição absoluta, impõe que as instalações sejam dispostas em locais ou áreas específicas da planta. O outro tipo, designado por restrições de posição relativa, permite relacionar a posição duma instalação com a da outra.

Posição Absoluta

As restrições de posição absoluta permitem não só obrigar à disposição das instalações em determinadas áreas da planta, ou então, excluir essas áreas da planta dos locais possíveis para a disposição das instalações. Uma situação já referida, que usa este tipo de restrições, ocorre quando a planta é envolvida por um rectângulo. As áreas que na realidade não pertencem à planta são excluídas com recurso a estas restrições.

A restrição de posição absoluta mais simples é aquela que obriga a que o ponto central de uma instalação coincida com um determinado ponto $p(x_p , y_p)$ da planta. A tradução deste facto é dado pela produção (4-74).

$$x_i = x_p \wedge y_i = y_p \tag{4-74}$$

A equação (4-74) é uma versão simplificada de uma restrição que obriga a disposição de uma instalação dentro de uma determinada área $a(x_a , y_a , c_a , l_a)$, em que x_a e y_a representam as coordenadas do ponto central dessa área e c_a e l_a são, respectivamente, metade do seu comprimento e metade da sua largura. A restrição que impõe que uma instalação seja posicionada dentro duma determinada área é dada pelas produções (4-75) e (4-76).

$$(x_i - c_i \geq x_a - c_a) \wedge (x_i + c_i \leq x_a + c_a) \tag{4-75}$$

$$\left(y_i - l_i \geq y_a - l_a\right) \wedge \left(y_i + l_i \leq y_a + l_a\right) \quad (4\text{-}76)$$

Outra restrição que obriga à disposição das instalações em áreas específicas da planta, é aquela que exclui essas áreas. Uma forma simples de colocar esta restrição passa pela produção (4-77), que obriga a que a instalação *i* seja posicionada fora da área $a(x_a, y_a, c_a, l_a)$.

$$\begin{array}{l}\left(x_i + c_i < x_a - c_a\right) \vee \left(x_i - c_i > x_a + c_a\right) \vee \\ \left(y_i + l_i < y_a - l_a\right) \vee \left(y_i - l_i > y_a + l_a\right)\end{array} \quad (4\text{-}77)$$

Esta fórmula pode ser modificada de modo a remover as disjunções em (4-77) pelo uso de variáveis booleanas. A sua utilização dá origem ao aparecimento das produções (4-78) a (4-82).

$$\left(b_{ia}^{x} = 1 \Leftrightarrow x_i + c_i < x_a - c_a\right) \wedge \left(b_{ia}^{x} = 0 \Leftrightarrow x_i + c_i \geq x_a - c_a\right) \quad (4\text{-}78)$$

$$\left(b_{ai}^{x} = 1 \Leftrightarrow x_i - c_i > x_a + c_a\right) \wedge \left(b_{ai}^{x} = 0 \Leftrightarrow x_i - c_i \leq x_a + c_a\right) \quad (4\text{-}79)$$

$$\left(b_{ia}^{y} = 1 \Leftrightarrow y_i + l_i < y_a - l_a\right) \wedge \left(b_{ia}^{y} = 0 \Leftrightarrow y_i + l_i \geq y_a - l_a\right) \quad (4\text{-}80)$$

$$\left(b_{ai}^{y} = 1 \Leftrightarrow y_i - l_i \geq y_a + c_a\right) \wedge \left(b_{ai}^{y} = 0 \Leftrightarrow y_i - l_i \leq y_a + l_a\right) \quad (4\text{-}81)$$

$$1 \leq b_{ia}^{x} + b_{ai}^{x} + b_{ia}^{y} + b_{ai}^{y} \leq 2 \quad (4\text{-}82)$$

Posição Relativa

A colocação de restrições de posição relativa envolve sempre duas instalações. São possíveis quatro restrições de posição relativa: 'à frente de', 'atrás de', 'à esquerda de' e 'à direita de'. A formulação destas restrições é bastante simples. No entanto, é necessário distinguir situações de posição relativa do tipo "parcial" e "completa". Na primeira situação apenas as variáveis relativas às coordenadas intervêm, enquanto na segunda situação, para além das coordenadas, também participam as variáveis relativas ao tamanho das instalações.

A formulação de que a instalação *i* deve ser disposta à direita, esquerda, à frente ou atrás de *j* de uma forma parcial é dada, respectivamente, pelas produções (4-83), (4-84), (4-85) ou (4-86).

$$x_i > x_j \tag{4-83}$$

$$x_i < x_j \tag{4-84}$$

$$y_i > y_j \tag{4-85}$$

$$y_i < y_j \tag{4-86}$$

De igual forma, a formulação de que à instalação *i* deve se disposta à direita, esquerda, à frente ou atrás de *j*, de uma forma completa é dada, respectivamente, pelas produções (4-87), (4-88), (4-89) ou (4-90).

$$x_i - c_i > x_j + c_j \tag{4-87}$$

$$x_i + c_i < x_j - c_j \tag{4-88}$$

$$y_i - l_i > y_j + l_j \tag{4-89}$$

$$y_i + l_i < y_j - l_j \tag{4-90}$$

Orientação das Instalações

Em último lugar surgem as restrições que limitam a orientação das instalações. As restrições de orientação podem ser restrições de orientação absoluta, envolvendo apenas uma instalação, ou então são restrições de orientação relativa, neste caso envolvendo pelo menos duas instalações.

No que se refere às restrições de orientação absoluta, diz-se que uma instalação está disposta de uma forma paralela ao eixo dos *x*, se o seu comprimento for superior à sua largura. De igual modo, diz-se que uma instalação está disposta paralelamente ao eixo dos *y*, se o seu comprimento for inferior à sua largura. Recorrendo a variáveis booleanas é possível formular estas duas situações com as produções (4-91) e (4-92), respectivamente. Estas restrições são bidireccionais, no sentido em que é possível impor uma dada orientação, através da variável booleana e, por outro lado, saber qual a orientação da instalação pela consulta das variáveis booleanas.

$$\left(b_i^x = 1 \Leftrightarrow c_i > l_i\right) \wedge \left(b_i^x = 0 \Leftrightarrow c_i \leq l_i\right) \quad (4\text{-}91)$$

$$\left(b_i^y = 1 \Leftrightarrow c_i < l_i\right) \wedge \left(b_i^y = 0 \Leftrightarrow c_i \geq l_i\right) \quad (4\text{-}92)$$

A formulação das restrições de orientação absoluta permitem uma caracterização deveras simples das restrições de orientação relativa. Esta formulação usa as variáveis booleanas que foram utilizadas para a orientação absoluta. Para impor que a instalação i deve ter a mesma orientação que a instalação j recorre-se à produção (4-93), que fixa que ambas as instalações devem ser paralelas ao eixo dos x, ou então devem ser paralelas ao eixo dos y. Do mesmo modo, para impor que a instalação i deve ter uma orientação diferente da instalação j, recorre-se à produção (4-94). Neste caso se a orientação de uma instalação for paralela ao eixo do x, a outra tem de ser paralela ao eixo dos y.

$$\left(b_i^x = b_j^x\right) \vee \left(b_i^y = b_j^y\right) \quad (4\text{-}93)$$

$$\left(b_i^x = b_j^y\right) \vee \left(b_i^y = b_j^x\right) \quad (4\text{-}94)$$

4.2.3 Pesquisa de Soluções e Optimização

A pesquisa de soluções para problemas de *layout* envolve a etiquetagem de todas as variáveis presentes na formulação de PPLI, de acordo com paradigma da PLR(*DF*). A forma mais simples de efectuar esta etiquetagem das variáveis, e provavelmente a que apresenta o pior desempenho, passa por se escolher um valor do domínio de cada uma destas variáveis e realizar a correspondente instanciação, e deixar que o mecanismo de propagação de um meta-interpretador de PLR(*DF*) realize todo o trabalho de remoção de inconsistências. De referir que as variáveis são instanciadas uma a uma, e o mecanismo de propagação dos seus valores entra em acção sempre que se realiza uma instanciação.

Para encontrar a solução óptima para os problemas não basta encontrar uma solução. É condição necessária que seja encontrada a melhor solução, sendo ainda necessário provar que de facto essa é a solução óptima. O modelo para PPLI, tal como foi considerado neste capítulo, apresenta-se com um espaço de soluções deveras abrangente. Este facto faz com que um algoritmo de optimização que efectue uma pesquisa sistemática em todo o espaço de soluções recorra a um grande poder computacional, poder este que na maior parte das situações pode não estar disponível. No entanto, mesmo que exista esse grande poder computacional, o tempo normalmente gasto para encontrar a melhor solução é impraticável. Estas limitações levam a que se procurem técnicas mais sofisticadas e inteligentes de etiquetagem das variáveis. Estas técnicas envolvem a utilização de heurísticas e algoritmos de optimização que não realizam uma pesquisa sistemática do espaço de soluções, sendo portanto, incompletos. Não garantindo a solução óptima, estas técnicas podem dar soluções de boa qualidade. Verifica-se muito frequentemente que é suficiente a obtenção de boas soluções e, desta forma, o esforço despendido na procura da solução óptima nem sempre é compensador.

A optimização de PPLI é uma tarefa complexa, mesmo usando o paradigma da PLR. Esta tarefa requer, por conseguinte, uma análise mais cuidada. Os capítulos seguintes destinam-se a identificar alternativas para a implementação prática de procedimentos de pesquisa e optimização para o PPLI que foi abordado formalmente neste capítulo.